THÉORIE DE LA MESURE ET INTÉGRATION
EXERCICES – semaine 5&6

Exercice 1.
Soient E un espace métrique compact et $A, B \subset E$. Montrer que $\mathrm{dist}(A, B) > 0$ si et seulement si $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$.

Donner un exemple ou E n'est pas compact et ou $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, mais $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.

Exercice 2 (☠).
Le but de cet exercice est de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ à l'aide du Théorème d'extension de Caratheodory (3.3 dans le cours).

(a) Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre engendrée par les intervalles. Il s'agit de l'ensemble des unions finies disjointes d'intervalles. Définir ρ pour $\mathcal{A}$.

(b) Pour montrer que ρ est σ-additive sur $\mathcal{A}$, montrer qu'il suffit de montrer que, pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $I_1, I_2, \dots \subset \mathbb{R}$ deux à deux disjoints, tels que

$$I = \bigsqcup_n I_n,$$

on a $\rho(I) = \sum_n \rho(I_n)$.

(c) Pour montrer ce dernier fait, observer que $\rho(I) \geq \sum_n \rho(I_n)$ trivialement. Pour l'inégalité inverse, commencer par montrer le résultat suivant:
Si J et $J_1, J_2 \dots$ sont des intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ avec $J \subset \bigcup_n J_n$, alors $\rho(I) \leq \sum_n \rho(I_n)$.

Exercice 3 (☠).
Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ invariant par toute translation rationnelle (c.-à-d. $A = A + q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$). Montrer que A ou A^c est λ-négligeable.
Indication: que dire de la mesure $\mu(B) = \lambda(A \cap B)$?

Exercice 4.
Soient E un espace métrique et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ une collection de sous-ensembles avec $\emptyset \in \mathcal{A}$. De plus, soit $\rho : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ une fonction avec $\rho(\emptyset) = 0$. Pour $\delta > 0$ et $A \subset E$, posons

$$\mu_\delta(A) = \inf\Big\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \rho(A_n) : \, A_0, A_1, \dots \in \mathcal{A},\, A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \text{ et } \mathrm{diam}(A_n) < \delta,\, \forall n \geq 0 \Big\};$$

(par convention on pose $\inf \emptyset = \infty$). De plus, posons $\mu_0(A) = \lim_{\delta \searrow 0} \mu_\delta(A)$.

Montrer que μ_0 est une mesure extérieure sur E et que $\mathcal{B}(E) \subset \mathcal{M}(\mu_0)$.

Exercice 5 (Théorème d'Egorov ☠)**.**
Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < \infty$, et soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions

mesurables, définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons que (f_n) converge presque partout vers une fonction $f : E \to \mathbb{R}$.
Montrer que alors (f_n) converge uniformément en-dehors d'un ensemble de mesure arbitrairement petite. Plus exactement, montrer que pour tout $\epsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A \subset E$ tel que $\mu(A) < \epsilon$ et tel que

$$\sup_{x \in A^c} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Indications:

(a) Pour $\delta > 0$, considérer les ensembles $B_N^{(\delta)} = \{x \in E : \forall n \geq N \, |f_n(x) - f(x)| < \delta\}$. Que peut-on dire sur $\mu(B_N^{(\delta)})$ quand $N \to \infty$?

(b) Pour une suite croissante N_k, que peut-on dire de l'ensemble $\bigcap_{k\geq 1} \mu(B_N^{(1/k)})$, ou plus précisément de la convergence de f_n vers f sur cet ensemble ?

(c) Si on choisie la suite N_k de manière intelligente, peut-on s'assurer que $\left[\bigcap_{k\geq 1} \mu(B_N^{(1/k)})\right]^c$ est de probabilité arbitrairement petite ?

Exercice 6.
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$.

(a) Montrer que F admet un nombre au plus dénombrable de sauts, c.-à-d. de points x ou $\lim_{t\nearrow x} F(x) \neq \lim_{t\searrow x} F(x)$. Notons S l'ensemble des sauts de F.

(b) Montrer qu'on peut modifier F pour la rendre continue à droite, sans changer ses limites à gauche/droite, en posant $\tilde{F}(x) = \lim_{y\searrow x} F(y)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Désormais on va considérer que F est continue à droite.

(c) Soit $m(x) = F(x) - \lim_{y\nearrow x} F(y)$ le saut au point x. Posons $G(x) = \sum_{y\leq x} m(y)$. Montrer que $G(x) \leq F(x)$ pour tout x.

(d) Montrer que $F - G$ est une fonction continue croissante.

(e) Supposons que μ et $\tilde{\mu}$ sont des mesures de fonctions de répartition F et $F - G$, respectivement. Notons

$$\mathrm{m} = \sum_{x\in S} m(x)\delta_x,$$

où δ_x est la mesure de Dirac en x. Montrer que $\mu = \tilde{\mu} + \mathrm{m}$.

Exercice 7 (Construction de la mesure associée à une fonction de répartition I)**.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point, avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$. Le but de cet exercice est de construire la mesure de fonction de répartition F en passant par les mesures extérieures.

(a) Supposons que F est continue. En utilisant la même stratégie que pour la mesure de Lebesgue, montrer l'existence d'une mesure μ de fonction de répartition F.
Indication: poser $\mu(A) = \inf\{\sum_{n\geq 0} F(b_n) - F(a_n) : A \subset \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[\}$ et montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\mu(A) = \inf\{\sum_{n\geq 0} F(b_n) - F(a_n) : A \subset \bigcup_{n\geq 0}]a_n, b_n[\text{ et } b_n - a_n < \epsilon \ \forall n\}$.

(b) Pour F pas nécessairement continue, considerer la décomposition $F = \tilde{F} + G$, ou $\tilde{F}$ est continue et G corresponde uniquement au sauts de F. Observer qu'il existe des mesures $\tilde{\mu}$ et m sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ de fonctions de répartition $\tilde{F}$ et G, respectivement.

(c) Conclure qu'il existe une mesure de fonction de répartition F.

Exercice 8 (Construction de la mesure associée à une fonction de répartition II)**.**
Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, continue à droite et admettant des limites à gauche en tout point, avec $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) < \infty$. Le but de cet exercice est de construire la mesure de fonction de répartition F à partir de la mesure de Lebesgue λ.

(a) Montrer qu'il existe au plus un nombre dénombrable de $x \in \mathbb{R}$ avec $|F^{-1}(\{x\})| > 1$.

(b) Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, posons $F(A) = \{F(x) : x \in A\}$. Montrer que $F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Indication: considerer $\mathcal{C} := \{A \subset \mathbb{R} : F(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$; utiliser le point (a) pour montrer que $\mathcal{C}$ est une tribu.

(c) Supposons que F est continue. Montrer que $\mu(A) = \lambda(F(A))$ définit une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que sa fonction de répartition est F.

(d) Si F est une fonction quelconque avec les propriétés de l'énoncé (mais pas forcement continue), poser $\overline{F(A)} = \bigcup_{x\in A}[\lim_{t\nearrow x} F(t), F(x)]$ pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrer que $\overline{F(A)} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, que $\mu(A) = \lambda(\overline{F(A)})$ définit une mesure finie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que sa fonction de répartition est F.

(e) Que obtient-t-on si on pose $\nu(A) = \lambda(F(A))$ quad F est une fonction de répartition avec des discontinués?

Exercice 9.
Soit μ une mesure finie de fonction de répartition F_μ. Supposons que $F_\mu \in \mathcal{C}^1$. Montrer que μ admet la densité F'_μ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.

Exercice 10.
L'ensemble de Cantor $C_\infty \subset [0, 1]$ est défini comme suit. Soit $C_0 = [0, 1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \bigcap_{n\geq 0} C_n$.

(a) Calculer $\lambda(C_n)$ et déduire que $\lambda(C_\infty) = 0$.

(b) Soit F_n la fonction de répartition de $\big(\frac{3}{2}\big)^n\lambda(.\cap C_n)$ où $\lambda(.\cap C_n)$ est la mesure de Lebesgue restreinte à C_n (c.-à-d. la mesure donnée par $A \mapsto \lambda(A \cap C_n)$). Dessiner sur un même graph, $F_0, F_1, \ldots$.

(c) Montrer que $(F_n)_{n\geq 0}$ converge quand $n \to \infty$ vers une fonction croissante F (est-ce que la convergence est simple/en norme infinie $\|.\|_\infty$?)

(d) Montrer que F est croissante et continue.

(e) Soit μ la mesure de fonction de répartition F. Montrer que $\mu(C_\infty) = [0, 1] = 1$ mais que μ n'as pas d'atomes (c.-à-d. que $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$) .

(f) Est-ce qu'il existe une fonction f mesurable positive telle que $\mu = fd\lambda$?

La mesure μ est concentrée sur un ensemble de mesure de Lebesgue 0, mais n'a pas d'atomes. Cet exemple nous montre qu'une mesure ne se décompose pas uniquement dans une partie absolument continue et une partie atomique.

Exercice 11.
Soit μ une mesure infinie sur $\mathbb{R}$, telle que $\mu([a,b]) < \infty$ pour tout $a < b$.

(a) Construire une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a), \qquad \text{pour tout } a < b.$$

(b) Est-ce que F est unique ? Et si on impose que $F(0) = 0$?

(c) Quelles des propriétés des fonctions de répartition s'appliquent aussi à F ?

(d) Si on se donne F avec les propriétés du point précédent, peut-on déduire l'existence/l'unicité d'une mesure μ avec $\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$ pour tout $a < b$?

Exercice 12.
Le but de cet exercice est d'exhiber un ensemble non-dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

Soit $C_0 = [0,1]$. On pose $C_1 = C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \subset C_0$. Puis $C_2 = C_0 \setminus \big((\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})\big)$ etc. Formellement $C_{n+1} = \frac{1}{3}C_n \cup \big(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}C_n\big)$. Enfin, on pose $C_\infty = \cap_n C_n$.

Monter que C_∞ a mesure de Lebesgue nulle mais qu'il n'est pas dénombrable.